CHAPITRE 5

Bruit thermique

5.1 - Introduction

A la température ambiante, les électrons d'un matériau disposent d'une énergie $E = K.T$ leur permettant de se déplacer dans le réseau cristallin. Le déplacement de ces électrons est complètement désordonné (**mouvement *Brownien***) et dans ces conditions, il est plus juste de parler d'**agitation thermique**. Durant leur **déplacement aléatoire**, les électrons vont entrer en collision avec les atomes du réseau cristallin. Lorsque le **temps de transit** des électrons devient **supérieur** au **temps de relaxation** (temps séparant deux collisions), il en résulte une fluctuation aléatoire de la charge conduisant à un bruit d'origine thermique.

Ce phénomène a été mis en évidence en 1927 par *Thomson*, et quantifié par *Nyquist* l'année suivante.

5.2 - Bruit d'une résistance

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au bruit thermique d'une résistance. Nous considérons que cette résistance est constituée d'un métal de résistivité ρ, dans lequel les électrons forment un gaz, animé par l'agitation thermique. Si l'on applique une d.d.p. externe, les électrons de ce gaz suivent un déplacement d'ensemble, freiné par les collisions avec les atomes du réseau. En l'absence de d.d.p. extérieure, l'agitation thermique crée des fluctuations de tension.

Pour donner une représentation du bruit de cette résistance, nous pouvons considérer qu'elle est formée d'une résistance idéale non-bruyante, associée à un générateur de tension de bruit $E(t)$, **aléatoire**, **stationnaire** et **centrée** (moyenne nulle), suivant une loi de **Gauss**. Dans ces conditions, les propriétés de $E(t)$ sont complètement déterminées si l'on connaît sa densité spectrale $S_E(\nu) = S_E$.

Considérons maintenant, que cette résistance « bruyante » est en série avec une capacité pure et intéressons nous à la tension aléatoire aux bornes de la capacité (Fig. 5.1).

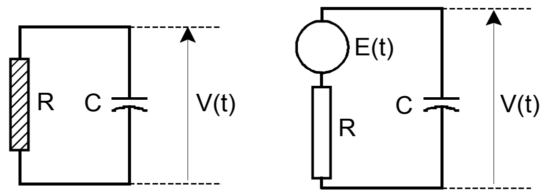

Fig. 5.1 - Schéma équivalent d'un système R bruyant-C.

Si l'ensemble R-C est maintenu à température constante, le théorème de l'équipartition de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}C.\mathrm{E}\left[V^2\right]=\frac{1}{2}K.T \tag{5.1}$$

— K : est la constante de *Boltzmann* ($K=1{,}38.10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$) *;*

— T *:* est la température absolue en *Kelvin*

Le passage de $E(t)$ à $V(t)$, s'effectue par un filtrage linéaire $G(\nu)$, représenté sur la figure 5.2, tel que :

$$G(\nu)=\frac{1}{1+j.2.\pi.R.C.\nu} \tag{5.2}$$

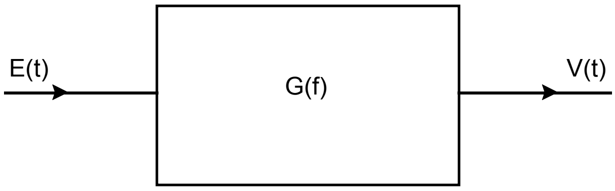

Fig. 5.2 - Filtre linéaire.

Les résultats mis en évidence au chapitre 3 (Paragraphes 3.2 et 3.3) conduisent à :

$$\mathrm{E}\left[(E(t))^2\right]=E_{eff}{}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}S_E(\nu).\mathrm{d}\nu=2\int_{0}^{+\infty}S_E(\nu).\mathrm{d}\nu \tag{5.3}$$

$$\mathrm{E}\left[(V(t))^2\right]=V_{eff}{}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}S_V(\nu).\mathrm{d}\nu=2\int_{0}^{+\infty}S_V(\nu).\mathrm{d}\nu \tag{5.4}$$

$$S_V(\nu)=S_E(\nu).\left|G(\nu)\right|^2 \tag{5.5}$$

A partir des relations (5.4), (5.5) et (5.2), nous obtenons :

$$V^2_{eff} = E\left[V^2\right] = S_E \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1 + (2.\pi.R.C)^2.\nu^2} \tag{5.6}$$

En intégrant la relation (5.6) et en identifiant avec la relation (5.1), nous obtenons :

$$S_E = 2.K.T.R \tag{5.7}$$

Si on se limite au domaine des fréquences positives, la relation (3.7) conduit à :

$$\gamma_E = 2.S_E(\nu) = 4.K.T.R \tag{5.8}$$

Soit, compte tenu de la relation (3.30) :

$$E_{eff}^{\ 2} = \gamma_E(f).\Delta f = 4.K.T.R.\Delta f \tag{5.9}$$

Si l'on considère par exemple, une résistance $R = 1\text{M}\Omega$ à $T = 300\text{K}$, on mesure :

— Pour $Bn = 100\text{KHz};$ $U_{eff} = 41\mu\text{V}$

— Pour $Bn = 10\text{MHz};$ $U_{eff} = 0,41\text{mV}$

5.3 - Association de résistances

5.3.1 - Association série

Considérons deux résistances à la même température T, placées en série (Fig. 5.3).

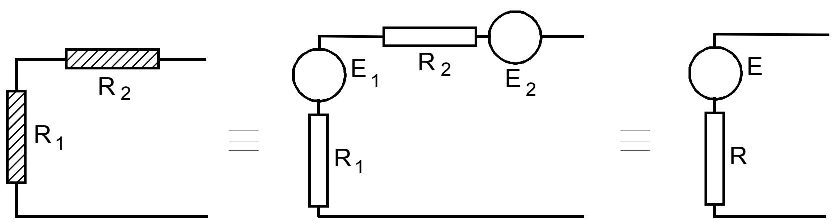

Fig. 5.3 - Résistances en série.

Si le bruit apporté par chacune de ces résistance est incohérent et de moyenne nulle, la relation (5.9) permet d'écrire :

$$E_{1eff}^{\ 2} = 4.K.T.R_1.\Delta f \tag{5.10}$$

$$E_{2eff}^{\ 2} = 4.K.T.R_2.\Delta f \tag{5.11}$$

$$E_{eff}{}^2 = E_{1_{eff}}{}^2 + E_{2_{eff}}{}^2 \tag{5.12}$$

$$E_{eff}{}^2 = 4.K.T.\left(R_1 + R_2\right).\Delta f \tag{5.13}$$

$$R = R_1 + R_2 \tag{5.14}$$

Si la résistance R_1 est portée à la température T_1 et si la résistance R_2 est portée à la température T_2, nous avons :

$$E_{eff}{}^2 = 4.K.\left(R_1.T_1 + R_2.T_2\right).\Delta f \tag{5.15}$$

5.3.2 - Association parallèle

Lorsque les éléments bruyants sont associés en parallèle, la représentation admittance est recommandée. Le passage série-parallèle s'effectue en utilisant la représentation *Thévenin-Norton* (Fig. 5.4).

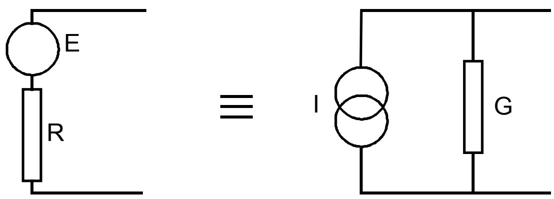

Fig. 5.4 - Equivalence Thévenin-Norton.

Le courant de court-circuit est donné par :

$$I_{eff}{}^2 = \frac{U_{eff}{}^2}{R^2} = G^2.U_{eff}{}^2 \tag{5.16}$$

En tenant compte de la relation (5.9) et en introduisant la conductance $G = 1/R$, nous obtenons :

$$I_{eff}{}^2 = \eta(f).\Delta f = 4.K.T.G.\Delta f \tag{5.17}$$

Nous pouvons déduire de la relation (5.17), la densité spectrale de courant de bruit thermique :

$$\eta(f) = \eta = 4.K.T.G \tag{5.18}$$

Considérons deux conductances à la même température T, placées en parallèle (Fig. 5.5).

Si le bruit apporté par chacune de ces conductance est incohérent et de moyenne nulle, la relation (5.17) permet d'écrire :

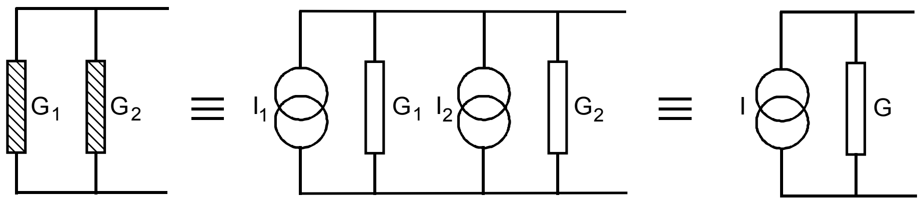

Fig. 5.5 - Conductances en parallèle.

$$I_{1_{eff}}{}^{2} = 4.K.T.G_1.\Delta f \tag{5.19}$$

$$I_{2_{eff}}{}^{2} = 4.K.T.G_2.\Delta f \tag{5.20}$$

$$I_{eff}{}^{2} = 4.K.T.(G_1 + G_2).\Delta f \tag{5.21}$$

$$G = G_1 + G_2 \tag{5.22}$$

Si la conductance G_1 est portée à la température T_1 et si la conductance G_2 est portée à la température T_2, nous avons :

$$I_{eff}{}^{2} = 4.K.(G_1.T_1 + G_2.T_2).\Delta f \tag{5.23}$$

5.4 - Puissance de bruit thermique

5.4.1 - Densité spectrale de puissance de bruit

Si l'on suppose qu'une résistance bruyante R, est connectée aux bornes d'une résistance non-bruyante R_0, la puissance de bruit délivré par R dans R_0, s'exprime par :

$$P = E_{eff}{}^{2}.\frac{R_0}{(R + R_0)^2} \tag{5.24}$$

La puissance est maximale lorsque la dérivée de la relation (5.24) par rapport à R_0 s'annule. Cela se produit pour $R_0 = R$.

La puissance maximale est alors :

$$P_{\max} = K.T.\Delta f \tag{5.25}$$

La densité spectrale de puissance de bruit thermique maximale se déduit de la relation (5.25) :

$$w(f) = w = K.T \tag{5.26}$$

Nous pouvons noter que $w(f)$ est indépendante de la résistance.

5.4.2 - Limitation quantique

Une étude plus fine , permet de démontrer que la densité spectrale de puissance peut s'écrire sous la forme :

$$w(f) = \frac{h.f}{2} + \frac{h.f}{\exp\left(\frac{h.f}{K.T}\right) - 1} \tag{5.27}$$

— h : est la constante de *Plank* ($h = 6{,}62.10^{-34}\,\mathrm{J.s}$) ;

— K : est la constante de *Boltzmann* ($K = 1{,}38.10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$).

Finalement, le bruit thermique reste un bruit blanc dans les conditions suivantes :

— $f << 6250\mathrm{GHz}$ si $T = 300\mathrm{K}$;

— $f << 20\mathrm{GHz}$ si $T = 1\mathrm{K}$.

La limite de la théorie précédente ne se fait ressentir qu'à très haute fréquence ou à très basse température.

5.4.3 - Référence des puissances

Les puissance sont généralement exprimées en décibels. Pour un système linéaire transformant une puissance P_1 en puissance P_2, le gain en puissance est donné par :

$$G_P = 10.\log\frac{P_2}{P_1} \tag{5.28}$$

Pour faire une mesure absolue de puissance, il faut fixer une référence P_0. On utilise alors la relation :

$$P_{abs} = 10.\log\frac{P}{P_0} \tag{5.29}$$

— si $P_0 = 1\mathrm{W}$, P_{abs} sera notée en dBW ;

— si $P_0 = 1\mathrm{mW}$, P_{abs} sera notée en dBm .

5.5 - Bruit thermique d'un dipôle passif

Un dipôle passif peut se caractériser par une impédance ou une admittance dont on connaît les parties réelles et imaginaires. Bien entendu, ces éléments varient avec la fréquence :

$$Z = R(f) + \mathrm{j}.X(f) \tag{5.30}$$

Considérons le schéma de la figure 5.6, où le dipôle d'impédance Z et une résistance R_0 sont portés à la même température T.

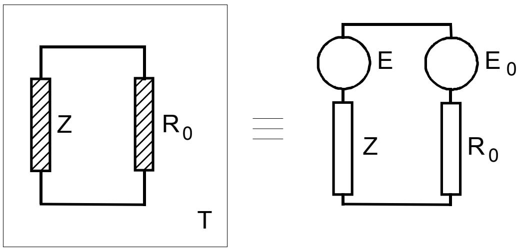

Fig. 5.6 - Schéma équivalent de bruit thermique d'un dipôle.

Si les deux éléments sont à l'équilibre thermodynamique, l'énergie fournie par le dipôle passif à la résistance est égale à l'énergie fournie par la résistance au dipôle passif.

Pour une plage de fréquence Δf, la densité spectrale de tension de bruit du dipôle est telle que :

$$E_{eff}^{\;2} = \gamma(f).\Delta f \tag{5.31}$$

La puissance moyenne fournie par R_0 sur une bande de fréquence Δf, sur laquelle on peut considérer que $R(f)$ est constante, est donnée par :

$$P_0 = R(f).I_{eff}^{\;2} \tag{5.32}$$

Avec :

$$I_{eff}^{\;2} = \frac{E_{0_{eff}}^{\;2}}{\left(R(f)+R_0\right)^2 + \left(X(f)\right)^2} \tag{5.33}$$

Nous obtenons :

$$P_0 = \frac{4.K.T.R_0.R(f).\Delta f}{\left(R(f)+R_0\right)^2 + \left(X(f)\right)^2} \tag{5.34}$$

La puissance moyenne fournie par le dipôle passif s'écrit :

$$P = \frac{\gamma(f).R_0.\Delta f}{\left(R(f)+R_0\right)^2 + \left(X(f)\right)^2} \tag{5.35}$$

L'égalité des relations (5.34) et (5.35), et la relation (5.31) conduisent à la densité spectrale de tension de bruit du dipôle :

$$\gamma(f) = 4.K.T.\mathrm{Re}[Z] \tag{5.36}$$

La valeur quadratique moyenne de la tension de bruit du dipôle est donnée par :

$$E_{eff}^{\;2} = 4.K.T.\mathrm{Re}[Z].\Delta f \tag{5.37}$$

Ce résultat peut se généraliser au cas des admittances. Nous aurons :

$$\eta(f) = 4.K.T.\mathrm{Re}[Y] \tag{5.38}$$

$$I_{eff}{}^2 = 4.K.T.\mathrm{Re}[Y].\Delta f \tag{5.39}$$

5.6 - Résistance équivalente de bruit

Considérons un dipôle caractérisé par un bruit blanc dans un domaine fréquentiel Δf. La résistance équivalente de bruit de ce dipôle est la résistance, qui portée à la même température T que le dipôle, présente la même densité spectrale ou la même valeur quadratique moyenne de bruit que le dipôle.

Nous avons :

$$\gamma(f) = \gamma = 4.K.T.R_{eq} \tag{5.40}$$

Soit :

$$R_{eq} = \frac{\gamma}{4.K.T} \tag{5.41}$$

5.7 - Température équivalente de bruit

La notion de température de bruit utilise le bruit thermique comme référence et elle s'applique également aux quadripôles.

La température de bruit est un paramètre caractérisant le bruit engendré par une source de bruit quelconque et qui permet de prendre en compte les sources de bruit autre que le bruit thermique de la même façon que celui-ci.